УДК 533.12

А. В. Горшков

ОБОБЩЕНИЕ ВАРИЦИОННОГО ПРИНЦИПА СКОРОСТЕЙ И НАПРЯЖЕНИЙ НА НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ*

1. Рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния при больших пластических деформациях материала (например, металла). Такие задачи возникают при исследовании процессов прокатки, прессования и др. В подобных процессах упругие деформации по сравнению с пластическими малы и ими можно пренебречь. Поэтому будем считать, что весь объем материала находится в пластическом состоянии [1].

В задачах с конечной деформацией определяющие (реологические) соотношения могут быть очень сложными. Одна из идей вариационного принципа скоростей и напряжений, предложенного В. Л. Колмогоровым [2], состоит в том, чтобы приближенное решение задачи точно удовлетворяло уравнениям кинематики и динамики Ньютона и приближенно – определяющим соотношениям. Здесь предлагается аналогичная схема для решения неизотермических задач: приближенное решение удовлетворяет уравнению движения и уравнению теплопроводности, полученному из условия сохранения энергии, и приближенно – определяющим соотношениям, в том числе закону теплопроводности Фурье.

При решении задачи используется начальная система координат Лагранжа (вообще говоря, криволинейная). Начальные координаты точек тела будем обозначать $(y_1, y_2, y_3) = \vec{y}$, текущие – $(x_1, x_2, x_3) = \vec{x}$.

2. Пусть задано тело объемом V. Для всех точек тела заданы определяющие соотношения, которые являются известными функционалами истории развития деформации во времени, плотности ρ, температуры T и т. п. Однако в каждый фиксированный момент времени t они обращаются в некоторые известные тензорные функции вместе с их обратными функциями:

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij}(e_{kl}, T), \tag{1}$$

$$e_{kl} = e_{kl}(\sigma^{ij}, T), \tag{2}$$

$$q_i = q_i(\operatorname{grad} T, \varepsilon_{ij}).$$

Здесь σ^{ij}, ε_{ij}, e_{kl} – компоненты тензоров напряжений, деформаций и скорости деформации соответственно, T – температура, q_i – компоненты вектора

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №01-01-000581.

потока тепла. В числе аргументов функций (1),(2) могут быть любые другие характеристики напряженного и деформированного состояний (например, производные по времени и т. п.). В условиях развитого формоизменения материал обладает реономными свойствами. Предполагается, что функции (1) удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial e_{ij}} > 0.$$

Пусть деформируемое тело ограничено внешней поверхностью S, состоящей из частей S_v,S_f,S_S, на которых заданы механические параметры:

$$\begin{gathered}\forall M \in S_v \quad v_i = v_i^*(t, M),\\ \forall M \in S_f \quad f^i = \sigma^{ij} n_j = f_*^i(t, M),\\ \forall M \in S_s \quad v_v = v_s^*(t, M), \quad \vec{f_\tau} = f_\tau^*(f_v, v_s)\vec{i}.\end{gathered} \tag{3}$$

На поверхности S задан также тепловой поток:

$$\forall M \in S \quad q_i = \varphi_i^*(t, M, T). \tag{4}$$

Звездочкой отмечены заданные функции времени и координат на соответствующих частях поверхности S: v_i^*, f_*^i, f_τ^*, v_s^*; $\varphi_i^*(t, M, T)$ – заданные функции времени, координат, температуры; $\vec{i} = \vec{v}_s/|v_s|$, $\vec{v}_s$ – вектор скорости скольжения инструмента по поверхности деформируемого тела; $\vec{f_n}$ – нормальные к поверхности составляющие соответствующих векторов; n_j– компоненты нормали к поверхности S; $f_\tau^* = f_\tau(f_n, v_s)$ – известный закон трения. Закон трения может быть функционалом пути движения частицы по поверхности S_s, но в фиксированный момент времени t он должен быть представлен известной функцией, причем разрешимой относительно v_s ($v_s = v_s(f_n, f_\tau)$), и удовлетворять следующему условию:

$$\frac{\partial f_\tau}{\partial v_s} > 0. \tag{5}$$

В функцию $f_\tau = f_\tau(f_n, v_s)$ в качестве аргументов могут быть включены любые другие величины (например, перемещение $u_s = \int_0^t v_s d\tau$ частицы по S_s). Соотношение (5) свидетельствует о вязких свойствах материала. Для простоты будем предполагать, что отсутствуют распределенные и поверхностные моменты. В каждой точке объема V заданы также начальные условия

$$\forall M \in V \quad v_i = v_i^0; \sigma^{ij} = \sigma_0^{ij}; T = T^0$$

(справа отмечены нулем известные функции координат).

3. Построим вариант принципа виртуальных скоростей и напряжений. Уравнения движения, как известно, имеют вид

$$\nabla_j \sigma^{ij} = \rho(w^i - g^{i*}), \tag{6}$$

где w^i – контравариантные компоненты вектора ускорения; g^{i*} – заданные компоненты вектора ускорения свободного падения. Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{q} + \sigma^{ij} e^p_{ij} + W^*_T. \tag{7}$$

Здесь C_p – теплоемкость среды; W^*_T – мощность объемных источников тепла, являющаяся заданной функцией времени, координат и температуры; e^p_{ij} – тензор скорости пластических деформаций. Так как по предположению весь объем тела находится в пластическом состоянии, то тензоры скоростей деформации и пластической деформации совпадают. Домножим каждое из уравнений (6) на соответствующее v_i/T, а (7) разделим на T. Результаты проинтегрируем по объему тела и сложим. После некоторых преобразований получится следующее соотношение:

$$\int_V \left\{ \rho \frac{C_p}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{W^*_T}{T} + \frac{\rho}{T}(w^i - g^{i*}) v_i \right\} dV =$$

$$= \int_S \left\{ -\frac{q_j n_j}{T} + \frac{\sigma^{ij} v_i n_j}{T} \right\} dS + \int_V \frac{(\sigma^{ij} v_i - q_j)\nabla_j T}{T^2} dV.$$

Заметим, что в полученном соотношении последнее слагаемое представляет внутреннее производство энтропии [3], а интеграл по поверхности тела – внешний приток энтропии.

Учтя краевые условия (3,4), получим

$$\begin{aligned} \int_V \left\{ \rho \frac{C_p}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{W^*_T}{T} + \frac{\rho}{T}(w^i - g^{i*}) v_i \right\} dV = \int_V \frac{(\sigma^{ij} v_i - q_j)\nabla_j T}{T^2} dV - \\ - \int_S \frac{\varphi^*_j n_j}{T} dS + \int_{S_f} \frac{v_i f^*_i}{T} dS + \int_{S_v} \frac{\sigma^{ij} n_j v^*_i}{T} dS + \int_{S_s} \frac{f^\tau v_s}{T} dS. \end{aligned} \tag{8}$$

4. Рассмотрим некоторое изохронное виртуальное напряженно-деформированное состояние, мало отличающееся от действительного (без штрихов):

$$\sigma'^{ij} = \sigma^{ij} + \delta\sigma^{ij}, v'_i = v_i + \delta v_i, f'^i = f^i + \delta f^i,$$
$$f^i = \sigma^{ij} n_j, T' = T + \delta T, q'_i = q_i + \delta q_i.$$

Компоненты вектора ускорения и производная температуры по времени не варьируются. Будем предполагать, что виртуальное состояние удовлетворяет по напряжениям уравнениям движения и граничным условиям в напряжениях, по скоростям – условиям совместности и граничным условиям в скоростях, по температуре – уравнению теплопроводности и соответствующим краевым условиям. Следовательно, для него должно выполняться полученное тождество (8). Тогда вариации скоростей, напряжений, температуры и теплового потока должны удовлетворять соотношению

$$\int_V \left\{ \frac{\rho}{T}(w^i - g^{i*})\delta v_i - \frac{1}{T^2}\left[\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - W_T + \rho(w^i - g^{i*})v_i\right]\delta T \right\} dV =$$
$$= \int_V \left\{ (-\delta q_i + v_i \delta\sigma^{ij} + \sigma^{ij}\delta v_i)\frac{\nabla_j T}{T^2} - (-q_j + \sigma^{ij}v_i)\delta\left(\nabla_j\left(\frac{1}{T}\right)\right)\right\} dV +$$
$$+ \int_S \frac{\varphi^{j*}n_j}{T^2}\delta T dS + \int_{S_f}\left(\frac{f^{i*}\delta v_i}{T} - \frac{f^{i*}v_i}{T^2}\delta T\right) dS + \qquad (9)$$
$$+ \int_{S_v}\left(\frac{\delta\sigma^{ij}n_j v_i^*}{T} - \frac{\sigma^{ij}n_j v_i^*}{T^2}\delta T\right) dS + \int_{S_s}\left(\frac{f^\tau \delta v_s}{T} - \frac{f^\tau v_s}{T^2}\delta T\right) dS.$$

Чтобы сконструировать функционал принципа, вынесем в (9) знак вариации из-под знака интеграла. При этом учтем зависимости (1),(2) напряжений от скоростей деформаций, теплового потока от температуры и обратные зависимости, а также граничные условия (3). Получим

$$\delta\left\{\int_V \frac{1}{T'}\left(\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} - W_T + \rho(w^i - g^{i*})v_i'\right) dV + \right.$$
$$+ \int_V \left[\int_{T_0}^{T'}\left(-q_j(T)\nabla_j\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{\sigma^{ij}e_{ij}^p}{T}\right) dT + \right.$$
$$\left. + \int_0^{v_i'} \sigma^{ij}(e_{ij}(v_k))\nabla_j\left(\frac{1}{T}\right) dv_i + \int_0^{\sigma'^{ij}} v_i(\varepsilon_{kl}(\sigma^{mn}))\nabla_j\left(\frac{1}{T}\right) d\sigma^{ij}\right] dV +$$
$$+ \int_S \frac{\varphi_j^* n_j}{T'} dS - \int_{S_f}\frac{v_i' f_i^*}{T'} dS - \int_{S_v}\frac{f'^i v_i^*}{T'} dS -$$
$$\left. - \int_{S_S}\left(\int_0^{v_{si}'}\frac{f_\tau^i(v_{si})}{T'} dv_{si} + \int_0^{f_\tau'^i}\frac{v_{si}(f_\tau^i)}{T'} df_\tau^i\right) dS\right\} = 0.$$

Получен функционал, вариация которого на действительном движении обращается в ноль. В отличие от варианта, приведенного в [2], здесь механические и температурные параметры объединены в один функционал.

Отметим, что в стационарном случае этот принцип соответствует известному утверждению неравновесной термодинамики: в равновесном состоянии приток энтропии достигает минимума [4]. В случае неподвижной изолированной изотропной системы получим известное соотношение: на истинном температурном поле достигается минимум [5]

$$\min \int_V \frac{\vec{q}\,\mathrm{grad}\,T}{T^2} dV.$$

Это соотношение сразу приводит к закону теплопроводности Фурье: минимум скалярного произведения векторов достигается, если векторы параллельны и противонаправлены, т. е. $\vec{q} = -\lambda\ \mathrm{grad}\ T$.

Литература

1. Друянов Б. А., Непершин Р. И. Теория технологической пластичности. М.: Машиностроение, 1990.
2. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением: Учеб. для вузов. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. техн. ун-та, 2001.
3. Седов Л. С. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 1, 2.
4. де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1969.
5. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М.: Мир, 1966.

Статья поступила 29.08.2002 г.
Окончательный вариант 12.09.2002 г.